8 Philosophie de la pratique mathématique

Valeria Giardino et Yacin Hamami

1. Introduction

La philosophie des mathématiques du XX^e siècle s'est majoritairement préoccupée de questions ayant trait aux fondements des mathématiques et à la nature des objets mathématiques[1]. Les travaux qui en résultent intègrent le plus souvent une conception idéalisée de l'activité mathématique, selon laquelle l'activité du mathématicien consisterait à générer une accumulation grandissante de propositions mathématiques — les théorèmes — en effectuant de longues chaînes de déductions formelles reposant *in fine* sur un nombre limité de propositions mathématiques élémentaires — les axiomes. Pour reprendre les termes de Henri Poincaré, le mathématicien apparaîtrait alors de manière caricaturale comme une « machine où l'on introduirait les axiomes par un bout pendant qu'on recueillerait les théorèmes à l'autre bout, comme cette machine légendaire de Chicago où les porcs entrent vivants et d'où ils sortent transformés en jambons et en saucisses » (Poincaré [1905], p. 816).

Depuis le milieu du XX^e siècle, plusieurs auteurs influents se sont attachés à étendre le périmètre des questions abordées en philosophie des mathématiques, en poussant notamment vers le développement d'une conception épistémologique plus riche de l'activité mathématique. Les travaux des mathématiciens Raymond Louis Wilder et George Pólya ont joué un rôle pionnier à ce sujet. Wilder s'est efforcé de montrer l'intérêt de concevoir les mathématiques comme produit ou système culturel (Wilder [1950] et Wilder [1981]), pouvant ainsi faire l'objet d'un traitement anthropologique et sociologique. Pólya s'est, quant à lui, intéressé aux méthodes de résolution de problèmes (Pólya [1945]),

1. La question des fondements est traitée dans les chapitres 2, 3, 4, 5 et 6 de ce volume. Celle de la nature des objets mathématiques dans les chapitres 7 et 10.

au raisonnement heuristique (Pólya [1954]), et aux processus de découverte et d'invention (Pólya [1962]), avec comme intention principale de promouvoir les compétences associées pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Peut-être l'ouvrage ayant amorcé l'un des tournants les plus radicaux par rapport à l'orthodoxie philosophique de son époque reste le livre désormais classique de Imre Lakatos intitulé *Proofs and Refutations* (Lakatos [1976]), qui se présente sous la forme d'un dialogue entre un professeur et un groupe d'étudiants tentant de démontrer le théorème de Descartes-Euler[2]. Lakatos entend fournir de cette manière une reconstruction rationnelle de la découverte de ce théorème, montrant à travers cet exemple que le développement de la connaissance mathématique ne se réduit pas à un enchaînement d'étapes de déductions formelles à partir d'axiomes et de définitions qui seraient figés dans le marbre, mais passe plutôt par un processus de « preuves » et « réfutations » au cours duquel la formulation de la conjecture considérée et des définitions impliquées évoluent constamment. Enfin, il est essentiel de mentionner également le livre influent de Phillip Kitcher intitulé *The Nature of Mathematical Knowledge* (Kitcher [1984]) dans lequel l'auteur propose de concevoir le développement de la connaissance mathématique comme une suite de transitions rationnelles entre pratiques mathématiques successives.

Au cours des vingt dernières années, un nombre croissant de contributions en philosophie des mathématiques ont poursuivi dans cette voie de porter une attention accrue à la pratique mathématique, donnant lieu à un mouvement ayant pris le nom de *philosophie de la pratique mathématique*[3]. Plusieurs ouvrages publiés durant cette période offrent un large panorama des perspectives et méthodologies développées dans ce domaine. Nous pouvons mentionner ici les collections d'articles éditées par Mancosu, Jørgensen, et Pedersen [2005], van Kerkhove et van Bendegem [2007], van Kerkhove [2009], et Löwe et Müller [2010], qui ont cherché à réunir des experts de divers horizons académiques autour de la question de ce qu'est une pratique mathématique, et sur la manière d'en aborder l'étude ; le volume édité par Mancosu [2008] qui entend concevoir la philosophie de la pratique mathématique comme un élargissement de l'agenda de recherche traditionnel en philosophie des mathématiques ; l'ouvrage collectif dirigé par Ferreirós et Gray [2006] qui a pour objectif de promouvoir une coopération plus forte entre histoire et philosophie

2. Le théorème de Descartes-Euler stipule que, pour tout polyèdre, le nombre de sommets moins le nombre d'arêtes plus le nombre de faces est toujours égal à deux.

3. On parle de « philosophie de la pratique mathématique » en réaction à la philosophie des mathématiques du XX[e] siècle. Cela ne veut pas dire que la philosophie des mathématiques ne s'est jamais intéressée à la pratique mathématique, bien au contraire (voir le chapitre 1 de ce volume).

des mathématiques ; la collection éditée par Larvor [2016] qui s'intéresse plus particulièrement à la notion de culture mathématique ; ou encore la récente monographie Ferreirós [2015], qui apparaît comme une des premières tentatives de proposer une philosophie des mathématiques cohérente basée sur l'idée que la connaissance mathématique émerge à travers diverses formes d'interactions entre de multiples pratiques mathématiques interconnectées[4].

Dans ce chapitre, nous aborderons quatre thématiques figurant au centre des discussions contemporaines en philosophie de la pratique mathématique : la relation entre preuves formelles et informelles, *i.e.*, entre les preuves telles que décrites par la logique formelle et les preuves dans la pratique mathématique (section 2) ; le rôle et la nature de la visualisation dans la pratique mathématique (section 3) ; l'utilisation des artefacts dans la pratique mathématique (section 4) ; la place des ordinateurs dans la pratique mathématique (section 5). Ces thématiques fournissent un échantillon représentatif du type de travaux menés en philosophie de la pratique mathématique, mais elles ne représentent bien évidemment qu'une sélection des nombreuses questions abordées dans ce domaine[5]. Le chapitre suivant, dédié à la pluralité des idéaux de preuve sous-jacents à la pratique mathématique, offre un exemple détaillé du genre d'étude menée dans cette perspective.

2. Preuves formelles et informelles

La notion de *preuve formelle* fait l'objet d'une définition précise et rigoureuse dans le domaine de la logique mathématique[6]. Afin de pouvoir énoncer cette définition, il est utile de revenir sur ce que l'on appelle la *formalisation des mathématiques*, décrite par le logicien et philosophe Kurt Gödel de la manière suivante :

> [L]a « formalisation » des mathématiques [...] signifie qu'un langage parfaitement précis a été inventé, par lequel il est possible

4. D'autres monographies importantes s'inscrivant également dans le mouvement de la philosophie de la pratique mathématique sont celles de Maddy [1997], Corfield [2003], Grosholz [2007], Macbeth [2014], Wagner [2017], et Baldwin [2018].

5. Plusieurs articles de revue fournissant un état des lieux du domaine, mais adoptant des perspectives différentes, ont été publiés ces dernières années en langue anglaise. Voir ici van Bendegem [2014], Giardino [2017b], Carter [2019], et Hamami et Morris [2020] .

6. La logique mathématique désigne l'étude de la logique formelle par des moyens mathématiques. Elle est généralement divisée en quatre branches (Barwise [1977]) : la théorie des ensembles, la théorie des modèles, la théorie de la récursion, et la théorie de la démonstration. La notion de preuve formelle est au cœur de cette dernière.

> d'exprimer n'importe quelle proposition mathématique par une formule. Certaines de ces formules sont prises comme axiomes, et certaines règles d'inférence sont stipulées qui permettent de passer des axiomes à de nouvelles formules et de déduire ainsi de plus en plus de propositions [...]. (Gödel [1995], p. 45)

La formalisation des mathématiques requiert donc deux éléments principaux : un *langage formel*, dans lequel toute proposition mathématique peut être exprimée sous la forme d'une formule ; un ensemble de *règles d'inférence*, stipulant les étapes de déduction admissibles ou autorisées, *i.e.*, les inférences qui seront considérées comme correctes ou valides. Dès lors qu'un système d'axiomes est spécifié et exprimé dans le langage formel choisi, on obtient un *système formel de déduction*. Au sein d'un système formel de déduction, une *preuve formelle* est définie comme une suite de formules dans laquelle chaque formule est soit un axiome, soit le résultat de l'application d'une règle d'inférence à une ou plusieurs formules obtenues précédemment.

La notion de preuve formelle constitue un modèle *normatif* du raisonnement mathématique, établissant un *idéal*, dans lequel les règles régissant les déductions admissibles sont intégralement et explicitement spécifiées, et les propositions mathématiques impliquées dans le raisonnement sont exprimées sous la forme de formules de manière à éliminer toute ambiguïté. Se pose alors la question de la relation entre les preuves telles qu'elles figurent dans la pratique mathématique — que l'on appellera *preuves informelles* — et le modèle normatif de la preuve formelle. Dans la philosophie des mathématiques du xx^e siècle, il a été communément admis, à quelques exceptions notables près, que les preuves informelles pouvaient être considérées comme des esquisses de preuves formelles, et qu'il n'y avait donc pas lieu de développer une conception philosophique spécifique aux preuves informelles. Cependant, ce point de vue ne résiste que peu à l'observation de la pratique mathématique, comme le souligne ici le mathématicien Thomas Hales :

> Le standard ultime de preuve est celui d'une preuve formelle, qui n'est rien d'autre qu'une chaîne ininterrompue d'inférences logiques à partir d'un ensemble explicite d'axiomes. Bien que ce soit l'idéal mathématique de preuve, la pratique mathématique dévie en général significativement de cet idéal[7]. (Hales [2012], p. x)

Comprendre la relation entre preuves formelles et informelles constitue aujourd'hui un des enjeux majeurs de la philosophie de la pratique mathématique.

7. Pour une analyse de la déviation entre preuves formelles et informelles au niveau de leurs étapes élémentaires de déduction, voir Hamami [2018].

Dans cette section, nous rapporterons tout d'abord les éléments principaux du débat entre les philosophes Yehuda Rav et Jody Azzouni sur la nature de la relation entre preuves formelles et informelles, cet échange ayant joué un rôle décisif dans l'émergence de cette ligne de recherche. Nous présenterons ensuite quelques tentatives récentes visant à proposer un modèle philosophique propre aux preuves informelles. Nous aborderons enfin le lien entre preuves informelles et compréhension mathématique.

2. 1 Le débat entre Rav et Azzouni

Les discussions contemporaines sur la relation entre preuves formelles et informelles trouvent leur origine, en partie, dans un article de Rav intitulé « Pourquoi prouvons-nous les théorèmes ? » (Rav [1999]). Dans cette contribution, Rav a attiré l'attention sur deux caractéristiques spécifiques aux preuves informelles, les distinguant ainsi des preuves formelles, à savoir : (1) leur *contenu sémantique*, et (2) leur capacité à véhiculer une connaissance mathématique de type *méthodologique* ou *stratégique*.

Rav considère que les preuves formelles sont, par définition, des objets de nature *syntaxique*, tandis que les preuves informelles possèdent un contenu *sémantique* irréductible. Ce contenu sémantique est précisément ce qui disparaît, selon Rav, lorsque l'on transcrit une preuve informelle en une preuve formelle, dans la mesure où il est impossible, à partir de la preuve formelle, de reconstruire les éléments sémantiques et les relations contextuelles présents dans la preuve originelle. Pour reprendre une métaphore proposée par Rav, une telle transcription serait l'équivalent d'une radio aux rayons X ne laissant apparaître que le squelette d'un individu, et à partir de laquelle il serait impossible de reconstruire l'enveloppe corporelle de ce dernier. Rav souligne, en outre, que si une preuve informelle ne se réduisait qu'à son « squelette logique », il suffirait alors, pour la comprendre, de simplement vérifier que chacune de ses étapes consiste en l'application d'une règle élémentaire d'inférence logique. Cependant, la compréhension d'une preuve informelle se révèle souvent être une tâche ardue, nécessitant une expertise mathématique solide, et par conséquent ne semble pas se réduire au simple processus de vérification d'une preuve formelle.

Rav considère, par ailleurs, que les preuves informelles jouent un rôle central en tant que véhicules de la connaissance mathématique. Il s'oppose ainsi à une conception philosophique répandue selon laquelle la connaissance mathématique réside essentiellement dans les propositions mathématiques, et non pas dans les preuves qui permettent de les établir. Rav établit cette thèse en s'appuyant sur une série d'exemples tirés de la pratique mathématique, à partir desquels il démontre le rôle catalyseur de la recherche et de la découverte des preuves dans la production de la connaissance mathématique, notamment à travers le développement d'innovations conceptuelles et méthodologiques, la systématisation de la connaissance, l'établissement de liens entre différentes théories ou branches mathématiques, etc. La connaissance mathématique véhiculée par les preuves informelles n'est cependant pas de type propositionnelle, mais plutôt de type méthodologique ou stratégique, relevant de l'ordre du *savoir-faire*. Cette dimension est parfaitement illustrée dans l'attitude quotidienne du mathématicien, qui se tourne vers les preuves mathématiques de la littérature afin d'y trouver d'éventuelles *méthodes* ou *techniques* lui permettant de résoudre les problèmes figurant sur son propre agenda de recherche.

Tout en acceptant le fait que les preuves informelles soient au cœur de la pratique mathématique, et en considérant qu'il serait inconcevable de substituer en pratique les preuves informelles par des preuves formelles, Azzouni [2004] a défendu une conception alternative de la relation entre preuves formelles et informelles, selon laquelle toute preuve informelle *indique* une preuve formelle sous-jacente[8]. Selon Azzouni, l'intérêt principal de cette conception est de permettre d'expliquer la faculté remarquable des mathématiciens à s'accorder entre eux sur la capacité d'une preuve mathématique à établir ou non le théorème qu'elle se propose de démontrer. Cette explication repose sur une des caractéristiques principales des preuves formelles, à savoir l'existence d'une *procédure mécanique* permettant leur vérification : si l'on suppose que les mathématiciens sont en mesure de reconnaître — implicitement ou explicitement — la procédure mécanique permettant de vérifier la preuve formelle indiquée par une preuve informelle, on obtient alors un processus uniforme permettant à chaque mathématicien de vérifier la validité d'une preuve informelle et, *a fortiori*, une explication de leur faculté à s'accorder collectivement sur le statut valide ou non d'une telle preuve.

Dans l'article que Rav a écrit en réponse à celui de Azzouni (Rav [2007]), Rav a soumis la proposition de ce dernier à un examen critique. Rav souligne, notamment, l'incapacité de la conception proposée à rendre compte de différentes variations dans l'acception de la locution « preuve mathématique », non seule-

8. Il est à noter que la position de Azzouni a évolué depuis son article de 2004 que nous discutons ici. Voir notamment Azzouni [2017].

ment en termes de critères d'acceptabilité et de rigueur, qui ont pu varier au cours de l'histoire des mathématiques, mais aussi en termes de différents standards normatifs, comme dans l'opposition entre raisonnements classiques et constructifs[9]. Rav pointe également certaines faiblesses dans la proposition de Azzouni, telles que l'absence d'une idée précise de ce que cela signifie, pour une preuve informelle, d'indiquer une preuve formelle, ou encore le manque d'une description concrète de la manière par laquelle il serait possible, pour un mathématicien, d'identifier la preuve formelle indiquée par une preuve informelle, et ce sans passer par une étape de formalisation complète.

Le débat entre Rav et Azzouni permet de mettre en avant deux réponses philosophiques possibles à la déviation entre preuves formelles et informelles. La première, celle de Rav, considère qu'une telle déviation indique une différence *essentielle* — *i.e.*, dans leur nature même — entre les preuves formelles et informelles, et que par conséquent il est nécessaire de développer une conception philosophique des preuves informelles *indépendante* de la notion de preuve formelle. La seconde, celle de Azzouni, reconnaît l'existence de la déviation entre preuves formelles et informelles, mais considère néanmoins qu'il est possible de rendre compte de la nature des preuves informelles en postulant une certaine relation entre preuves formelles et informelles.

2. 2 Vers un modèle philosophique des preuves informelles

Plusieurs modèles philosophiques des preuves informelles ont récemment été proposés dans la littérature. Ces modèles ont pour but de rendre compte des spécificités des preuves informelles, et ainsi de fournir une conception des preuves mathématiques plus fidèle à la pratique mathématique. Nous présentons ici les modèles développés par Andrew Aberdein, Hannes Leitgeb, et Brendan Larvor.

Aberdein a offert une analyse des formes d'argumentation présentes dans les preuves informelles (Aberdein [2006]) en s'appuyant sur les ressources de la *logique informelle* — un domaine qui se veut étudier les pratiques inférentielles et argumentatives dans leurs instantiations concrètes, et ce d'une manière alternative à la logique formelle. Aberdein considère deux modèles

9. Les raisonnements constructifs se distinguent des raisonnements classiques par le rejet de certaines formes de raisonnement, comme le raisonnement par l'absurde ou le recours au principe du tiers exclu. Sur le constructivisme en mathématiques, voir Troelstra et van Dalen [1988] et le chapitre 5 de ce volume.

d'argumentation particulièrement influents dans ce domaine — ceux de Stephen Toulmin et de Douglas Walton (voir Toulmin [1958] et Walton [1998]) — l'objectif étant d'évaluer l'intérêt de ces modèles pour l'analyse des preuves informelles. Le modèle de Toulmin [1958] apparaît comme limité à cet égard, dans la mesure où son côté abstrait autorise la génération de différentes reconstructions incompatibles d'un même argument mathématique. Le modèle de Walton [1998] apparaît, quant à lui, plus prometteur, notamment dû à l'attention portée au contexte dialectique des arguments ; tout argument intervenant, pour Walton, dans le contexte d'un *dialogue* spécifique. Aberdein remarque alors que les preuves informelles peuvent figurer au sein de différents types de dialogues argumentatifs dans la pratique mathématique. Parmi les types de dialogues qu'il identifie, on trouve le contexte dans lequel le théorème apparaît comme une conjecture et la preuve informelle comme la manière de résoudre cette conjecture en la démontrant ou en la réfutant, *i.e.*, comme la manière d'aboutir à un accord sur le statut de la conjecture. Un autre contexte est celui dans lequel la preuve informelle est soumise à un dialogue antagoniste, où l'agent proposant la preuve se doit de la défendre par rapport à un opposant qui pourrait la contester — ce contexte est celui que l'on va retrouver, par exemple, lors d'un processus d'évaluation par les pairs. Aberdein mentionne également le contexte dans lequel le but principal de la preuve est de transmettre de l'information, tel que de nouvelles techniques, méthodes, ou stratégies. En résumé, l'analyse de Aberdein a permis d'attirer l'attention sur l'importance du contexte dialectique dans l'analyse des preuves informelles, ainsi que sur l'existence d'une variété de dialogues argumentatifs au sein desquels les preuves informelles peuvent être appréhendées dans la pratique mathématique.

Leitgeb a développé une conception d'inspiration gödelienne des preuves informelles (Leitgeb [2009]), selon laquelle, contrairement aux preuves formelles, les preuves informelles possèdent à la fois une composante *sémantique* et une composante *intuitive*. Par la première, Leitgeb entend signaler que les propositions mathématiques figurant dans les preuves informelles possèdent une *signification*, qu'elles sont *interprétées* par rapport à une structure, ou une famille de structures, donnée. Par la seconde, Leitgeb entend indiquer que, dans les preuves informelles, les axiomes, tout comme les étapes de déduction, sont parfois jugés comme *évidents* ou *intuitifs*. La particularité du modèle de Leitgeb est de considérer que ces deux composantes des preuves informelles sont épistémologiquement interdépendantes. Il convient alors d'expliquer la manière par laquelle elles peuvent, ou doivent, interagir. La solution avancée par Leitgeb est que ces deux composantes correspondent à deux manières d'accéder épistémologiquement aux structures mathématiques. La manière sémantique consiste à accéder à de telles structures à travers un ensemble de propositions qui déterminent ces structures de manière *catégorique*[10], par exemple la manière dont les axiomes de Dedekind-Peano de second ordre déterminent de façon unique — *i.e.*, à isomorphisme près — la structure des nombres naturels. La manière intuitive relève, quant à elle, d'une forme sophistiquée de *perception* des structures mathématiques, qui se veut *directe*, et qui opérerait à travers certaines *représentations* des structures mathématiques. De telles représentations entretiendraient alors une relation abstraite de similarité structurelle avec la (ou les) structure(s) qu'elles représentent, de la même manière qu'une photo entretient une relation de similarité structurelle avec le (ou les) objet(s) qu'elle représente.

L'objectif de Larvor dans son article Larvor [2012] est de démontrer que toute preuve informelle subit une *perte* ou *déformation* dès lors qu'elle est transcrite en une preuve formelle, et que le (ou les) élément(s) perdu(s) ou déformé(s) au cours de ce processus joue(nt) un rôle essentiel dans le fonctionnement des preuves informelles en tant que preuves. Pour ce faire, l'approche de Larvor consiste à proposer, et à défendre, une conception des preuves informelles à partir de laquelle la thèse ci-dessus s'ensuit nécessairement. Cette conception est articulée autour de deux idées directrices : (1) la validité ou l'invalidité des preuves informelles repose non seulement sur leur forme logique, mais également sur leur *contenu*, (2) les inférences constituant les preuves informelles consistent en des *actions inférentielles* qui peuvent agir non seulement sur des propositions, mais également sur des représentations non propositionnelles telles que des diagrammes, notations, ou modèles informatiques. Ces deux éléments sont intimement connectés, car c'est justement parce que les actions inférentielles peuvent agir sur des représentations dépendantes de caractéristiques spécifiques au domaine mathématique dans lequel elles interviennent que leur validité ne peut être évaluée uniquement sur la base de leur forme logique. De telles actions ne peuvent ainsi être formalisées sans perte ou déformation, les actions inférentielles intervenant dans les preuves formelles étant, par définition, indépendantes du domaine mathématique dans lequel elles interviennent. Il reste encore à Larvor à expliquer pourquoi de telles actions jouent un rôle essentiel dans le fonctionnement des preuves informelles en tant que preuves. Larvor suggère alors que la validité de ces actions est régie, dans

10. Un ensemble de propositions détermine une structure **S** de manière *catégorique* si tous les modèles de cet ensemble de propositions sont isomorphes à **S**.

la pratique mathématique, par des *moyens de contrôle*, propre à chaque domaine mathématique, et spécifiant les actions admissibles dans ce domaine. Larvor entend ainsi promouvoir un programme de recherche pour la philosophie de la pratique mathématique consistant à identifier les actions inférentielles, ainsi que les moyens de contrôle les régissant, associés à chaque domaine mathématique.

Le développement d'un modèle philosophique propre aux preuves informelles apparaît comme un projet vaste et ambitieux, comme en témoigne la diversité des approches adoptées par les auteurs que nous venons de présenter, ainsi que la multitude des aspects qu'ils se proposent de rendre compte. Une manière de progresser sur ce sujet pourrait être de développer des modèles aux périmètres plus restreints, en se proposant de capturer seulement certaines dimensions particulières de la notion de preuve informelle. Une telle approche semble nécessaire si l'on souhaite être en mesure d'évaluer les forces et les faiblesses de chaque modèle proposé, et par là même de pouvoir comparer les différents modèles entre eux.

2. 3 Preuves informelles et compréhension mathématique

Comme le faisait remarquer Rav [1999], les preuves informelles diffèrent des preuves formelles quant à leur *compréhension* : alors qu'il suffit, pour comprendre une preuve formelle, de vérifier que chaque inférence qui la compose est en accord avec l'une des règles d'inférence élémentaires du système déductif considéré, la compréhension d'une preuve informelle relève d'un processus tout autre, nécessitant le plus souvent une expertise mathématique significative. Par ailleurs, seules les preuves informelles semblent être en mesure de véhiculer de la *compréhension mathématique*, comme le signalaient le logicien John A. Robinson ainsi que le mathématicien Saunders Mac Lane :

> *[L]es preuves informelles sont la matière première de la compréhension mathématique*. Par conséquent pour comprendre comment les preuves informelles fonctionnent, nous devons comprendre la compréhension mathématique [...]. (Robinson [1991], p. 280)

> [I]l y a de bonnes raisons pour lesquelles les mathématiciens ne présentent habituellement pas leurs preuves dans un style purement formel. C'est parce que les preuves ne sont pas seulement un

> moyen d'acquérir de la certitude, mais sont également un moyen d'acquérir de la compréhension. (Mac Lane [1986], p. 378)

Il y a donc là deux questions distinctes, bien que certainement interconnectées, à la croisée entre preuves informelles et compréhension mathématique : en quoi consiste la compréhension d'une preuve informelle ? et quelle est la nature de la compréhension mathématique véhiculée par les preuves informelles ?

À l'exception de quelques remarques isolées de la part d'une poignée de mathématiciens, logiciens, et philosophes, la notion de compréhension mathématique n'a reçu que peu d'attention au sein de la philosophie des mathématiques[11]. À ce jour, le seul traitement philosophique substantiel de cette notion est celui proposé par le logicien et philosophe Jeremy Avigad, que nous présentons maintenant.

Avigad a analysé la notion de compréhension mathématique en termes de possession de *compétences* mathématiques (Avigad [2008b, 2010]) : un agent comprend une démonstration, un théorème, un problème, une solution, un concept, etc., dès lors qu'il possède certaines compétences mathématiques spécifiques. La proposition de Avigad fournit ainsi un programme de recherche circonscrit pouvant conduire au développement d'une théorie philosophique de la compréhension mathématique : il s'agit d'analyser et de caractériser les compétences mathématiques, ainsi que leurs interactions mutuelles, associées à un contexte donné dans la pratique mathématique, afin de rendre compte des différents types de compréhension pouvant être attribués à un agent dans ce contexte particulier.

Bien que ce cadre se veuille général, Avigad développe cette approche dans le cas particulier de la compréhension des preuves mathématiques. Pour ce faire, il propose de s'appuyer sur les récentes avancées dans le domaine de la vérification formelle et de l'automatisation du raisonnement, dont l'un des objectifs principaux est justement de développer des technologies informatiques permettant de transcrire une preuve informelle en une preuve formelle, *i.e.*, de permettre aux ordinateurs de *comprendre*, à leur manière, les preuves informelles[12]. Pour différents types d'inférences que l'on retrouve communément dans les preuves informelles, l'idée est alors d'examiner les méthodes informatiques qui ont été développées pour vérifier formellement ces inférences,

11. La situation est différente dans le domaine de la philosophie des sciences et de l'épistémologie, voir par exemple De Regt *et al.* [2009] et Grimm *et al.* [2017].

12. Pour une présentation de la vérification formelle des preuves mathématiques, voir le numéro spécial de la revue *Notices of the American Philosophical Society* (n° 11, vol. 55) composé des articles Hales [2008], Gonthier [2008], Harrison [2008], et Wiedijk [2008].

et ainsi d'identifier et de caractériser les compétences nécessaires à la compréhension de ces inférences dans la pratique mathématique. On obtient alors une conception de la compréhension des preuves informelles en termes des compétences mathématiques nécessaires à la vérification des inférences qui les composent.

L'approche de Avigad fournit donc une réponse à la première des deux questions précédentes, *i.e.*, celle concernant la nature de la compréhension des preuves informelles. Elle offre également une réponse à la seconde question, dans la mesure où la compréhension mathématique véhiculée par les preuves informelles peut elle-même être analysée en termes de *transmission* de compétences mathématiques. Une telle analyse relierait alors la notion de compréhension mathématique à l'enjeu majeur de l'acquisition de compétences mathématiques via les preuves informelles. La perspective de Avigad rejoint ainsi celle de Rav [1999] qui, comme nous le mentionnons précédemment, insiste sur la capacité des preuves informelles à véhiculer une connaissance mathématique relevant du *savoir-faire*.

La question de la compréhension mathématique reste à ce jour un sujet émergeant au sein de la philosophie des mathématiques, et appelant à plus d'attention de la part des philosophes afin de nourrir et de structurer la discussion. Il est à noter que cette question est parfois abordée dans le cadre de la littérature sur l'explication mathématique (voir chapitre 9 d'Arana), une explication pouvant être conçue comme un moyen d'accéder à une meilleure compréhension[13].

3. Visualisation dans la pratique mathématique

Depuis la fin du XIXe siècle, la philosophie des mathématiques s'est principalement focalisée sur les aspects formels et propositionnels des mathématiques. Cela reste une évidence, cependant, que les mathématiciens utilisent un large spectre de représentations dans leur pratique quotidienne, certaines d'entre elles apparaissant manifestement comme de nature non-propositionnelles. L'exemple le plus emblématique est bien évidemment celui des représentations *visuelles*, qui sont quasi omniprésentes dans la pratique mathématique — il suffit de penser aux multiples figures, illustrations, et diagrammes jonchant les ouvrages de mathématiques. Par visualisation dans la pratique mathéma-

13. Le lecteur intéressé par ces questions est invité à consulter le numéro spécial de la revue *Logique & Analyse* consacré à ces sujets (Frans and van Kerkhove [2017]).

tique, nous entendrons ici, d'une part, l'utilisation de représentations visuelles externes et matérielles, et, d'autre part, le recours à l'imagination visuelle.

La philosophie de la pratique mathématique entend attribuer une place essentielle à la question de la visualisation, et ce afin de rendre compte de l'importance de la pensée visuelle en mathématiques, et ainsi de tenter de développer une conception philosophique des mathématiques plus fidèle à la pratique. Dans cette section, nous reviendrons, tout d'abord, sur les critiques formulées à l'encontre d'un rôle épistémique légitime de la visualisation en mathématiques. Nous exposerons, ensuite, les positions de James Robert Brown et de Marcus Giaquinto qui ont été parmi les premiers, à la fin des années 1990, à initier un regain d'attention philosophique pour la pensée visuelle en mathématiques. Nous présenterons, enfin, une sélection d'études de cas récentes visant à examiner la nature et le rôle de la visualisation au sein de certaines pratiques mathématiques spécifiques.

3. 1 Critiques de la visualisation en mathématiques

Le rôle de la visualisation en mathématiques, et de l'imagination visuelle en particulier[14], a été depuis toujours un thème cher à la philosophie. Cependant, au cours du XIXe siècle, certains événements marquants dans l'histoire des mathématiques — parmi lesquels l'émergence des géométries non euclidiennes et l'arithmétisation de l'analyse réelle — ont conduit la philosophie des mathématiques à se focaliser sur les fondements des mathématiques, et sur l'exigence de garantir une certaine forme de *certitude* de la connaissance mathématique. Dans ce contexte, plusieurs auteurs critiquèrent l'utilisation de la pensée visuelle en mathématiques, en géométrie comme dans d'autres domaines. David Hilbert, par exemple, exprima une position de défiance à l'égard de l'utilisation des diagrammes dans le raisonnement géométrique (Hilbert [1894/2004]). Moritz Pasch soutint également que la formalisation du raisonnement est essentielle pour s'assurer de manière fiable qu'une preuve mathématique est correcte :

> La manière la plus fiable de vérifier une preuve est de la formaliser. Il est vrai que si nous inspectons une preuve sans figure (réelle ou imaginée) avec suffisamment d'attention, nous pouvons nous passer du processus de formalisation. Mais les remarquables *Éléments*

14. Pour une étude historique de l'imagination en mathématiques de l'ère classique jusqu'au début du XXe siècle, voir Arana [2016].

> d'Euclide nous enseignent à quel point il est facile de trébucher. (Pasch [1926/2010], p. 236)

Cette dernière remarque repose sur l'idée que les preuves d'Euclide, à partir de la toute première proposition des *Éléments*, font appel de manière essentielle au diagramme, générant ainsi des lacunes dans le raisonnement, dans la mesure où ces « inférences diagrammatiques » ne se conforment pas au standard moderne selon lequel toute démonstration doit consister en une suite d'inférences formelles à partir des axiomes ou de propositions préalablement établies.

Cette critique du rôle épistémique de la visualisation correspond à cette époque à une perte graduelle de confiance en l'*intuition mathématique*, qui atteindra son paroxysme au début du XX^{e} siècle. Hans Hahn parla explicitement d'une « crise de l'intuition », observant que :

> Encore et encore nous avons remarqué que dans les questions géométriques, voir même dans les questions les plus simples et élémentaires, l'intuition est un guide auquel on ne peut se fier. Il est impossible de laisser une aide si peu fiable servir comme point de départ ou base d'une discipline mathématique. L'espace de la géométrie n'est pas une forme d'intuition pure, mais une construction logique. (Hahn [1933/1980], p. 98)

Hahn entend critiquer la position Kantienne selon laquelle la géométrie concerne les propriétés de l'espace qui nous sont présentées de manière complète et exacte par l'intuition pure *a priori*, c'est-à-dire indépendamment de l'expérience. Les idées de Kant semblent tout à fait plausibles vis-à-vis de l'état des connaissances mathématiques de son époque ; mais selon Hahn, les développements plus récents en mathématiques ont secoué profondément et définitivement leurs fondements. À ce sujet, l'un des exemples les plus caractéristiques reste la découverte — par Bolzano, Weierstrass, et d'autres — de l'existence de courbes qui ne peuvent en aucune façon être saisies par l'intuition, et dont la définition et la compréhension reposent uniquement sur l'analyse logique. Cela suggère, ou semble strictement impliquer, la supériorité de l'analyse logique sur l'intuition en tant que moyen de détermination de la vérité des propositions mathématiques. Il faudrait donc que l'analyse logique remplace partout l'intuition, dans le but de minimiser les possibilités d'erreurs. Suivant cette perspective, la philosophie du XX^{e} siècle rejeta majoritairement tout rôle de la visualisation dans la justification de la connaissance mathématique[15]. Quelques formes de pensée visuelle maintinrent tout au plus un rôle

15. Pour une discussion historique détaillée du déclin de l'intuition et de l'émergence du formalisme, voir Detlefsen [2007].

heuristique et psychologique, vouées à se confiner à ce que les néo-positivistes ont appelé le « contexte de découverte ».

Nous allons maintenant voir que, au cours de ces dernières années, plusieurs auteurs ont cherché à réhabiliter le rôle de la pensée visuelle en mathématiques, et à restaurer son éventuelle valeur épistémique, en considérant notamment l'utilisation des représentations visuelles au cœur de diverses preuves mathématiques. Bien que leurs conclusions n'aient pas une portée générale pour l'ensemble des mathématiques, leurs travaux montrent néanmoins que dans certains cas particuliers la pensée visuelle peut avoir un rôle épistémique légitime. Par ailleurs, il ressort de leurs analyses que la pensée visuelle n'est jamais considérée indépendamment de la pensée non visuelle ; les deux formes de pensée apparaissent, au contraire, comme intimement connectées.

3. 2 Brown et Giaquinto sur la visualisation en mathématiques

À la fin des années 1990, Brown contribua à réinstaurer la question de la visualisation en philosophie des mathématiques en se portant défenseur du rôle épistémique des figures dans les preuves mathématiques (Brown [1999]). Sa défense repose sur deux piliers principaux. En premier lieu, Brown critique l'objection qui se base sur le manque présumé de fiabilité des représentations visuelles comparativement aux représentations propositionnelles qui sous-tendent le raisonnement formel, en soulignant que les différents paradoxes concernant les fondements des mathématiques ne découlaient nullement d'un quelconque rôle de la visualisation dans le raisonnement mathématique, mais au contraire de certaines aberrations du raisonnement propositionnel (verbal, symbolique). En second lieu, Brown montre comment un rôle épistémique peut être attribué aux figures au sein d'une conception platoniste des mathématiques, selon laquelle les objets mathématiques existent indépendamment de nous, et en dehors du temps et de l'espace. Sa proposition repose sur l'idée que les représentations visuelles s'apparentent à des « télescopes » permettant d'observer un univers indépendant ; elles fonctionnent ainsi comme des outils plutôt que comme des représentations au sens littéral du terme : « *Certaines "images" ne sont pas vraiment des images, mais plutôt des fenêtres sur le paradis de Platon* » (Brown [1999], p. 39). En adoptant cette stratégie, Brown est en mesure de soutenir qu'il est possible de maintenir une conception réaliste des mathématiques et de ses objets sans pour autant se retrouver forcé d'adopter une position réaliste en ce qui concerne le statut ontologique des figures.

Quelques années plus tard, Giaquinto a consacré un livre à la pensée visuelle en mathématiques (Giaquinto [2007]), conçue comme comprenant à la fois le recours à l'imagination visuelle et l'utilisation de représentations visuelles matérielles. Parmi les nombreux thèmes abordés dans le livre, Giaquinto défend notamment la thèse selon laquelle il n'y a aucune raison de supposer que tous les cas de pensée visuelle en mathématiques doivent être traités de manière uniforme, les opérations visuelles étant diverses et liées dans chaque cas à un contexte mathématique particulier. Il serait donc nécessaire de développer une taxonomie beaucoup plus fine et complète pour analyser la pensée visuelle en mathématique, c'est-à-dire une taxonomie qui se doit d'aller au-delà de la distinction commune entre « pensée algébrique » et « pensée géométrique », et d'inclure une variété d'opérations telles que la visualisation du mouvement, la perception de symétries par réflexion, ou encore ce qu'il appelle l'*aspect shifting* — la capacité de changer de point de vue sur un problème donné. Dans le cas particulier de la géométrie, Giaquinto défend une position proche de celle de Kant, selon laquelle il existe en mathématiques des cas de connaissance *synthétique a priori*. Selon Giaquinto, en tant que sujets connaissants, nous avons des dispositions générales à nous former certaines croyances à propos de formes géométriques basiques, dispositions qui trouvent leur origine dans la manière même dont notre système perceptif est constitué. Suite à une expérience visuelle, ou à un acte d'imagination, ces dispositions peuvent donner lieu à des croyances géométriques ayant le statut de connaissances synthétiques *a priori*, dans la mesure où elles ne sont ni analytiques — elles ne relèvent pas d'une quelconque déduction à partir de définitions conceptuelles — ni *a posteriori* —l'expérience n'intervenant pas dans leur justification.

Les ouvrages de Brown et Giaquinto ont permis de réinscrire à nouveau les aspects visuels de la pratique mathématique sur l'agenda de recherche de la philosophie des mathématiques. Nous nous tournons maintenant vers une série de travaux plus récents s'inscrivant dans cette filiation et visant à étudier la nature et le rôle de la visualisation au sein de trois pratiques mathématiques contemporaines[16].

16. Pour une discussion générale de la pensée visuelle et de la pensée diagrammatique en mathématiques, voir respectivement Giaquinto [2016] et Giardino [2017a], ainsi que le cahier spécial de *Synthese* édité par Mumma et Panza [2012].

3. 3 Visualisation en mathématiques : études de cas

Une des méthodologies les plus répandues en philosophie de la pratique mathématique consiste à aborder une ou plusieurs questions philosophiques à travers des études de cas ciblées de pratiques mathématiques spécifiques. Cette méthodologie a généré un riche corpus de travaux sur la question de la visualisation en mathématiques. Nous rapportons ici les résultats de plusieurs philosophes de la pratique mathématique concernant diverses études de cas de visualisation dans la pratique mathématique.

Jessica Carter a conduit plusieurs études de cas concernant l'utilisation des diagrammes dans le raisonnement mathématique (voir Carter [2010, 2012]). Selon Carter, les diagrammes fonctionnent comme des « cadres », dans le sens où, même s'ils ne sont pas utilisés directement dans une preuve rigoureuse, ils peuvent néanmoins jouer un rôle essentiel dans la découverte et la formulation de théorèmes et preuves mathématiques. Plus spécifiquement, ils peuvent suggérer certaines manipulations sur des objets mathématiques, manipulations qui ne seraient pas forcément évidentes en leur absence. L'interaction entre diagrammes et aspects plus formels de la pratique apparaît alors comme cruciale : si les représentations visuelles constituent un lieu d'expérimentation pour la formulation et l'évaluation d'hypothèses mathématiques, c'est parce que les relations qui se basent sur celles-ci correspondent à des relations qui sont *aussi* valables dans le cadre algébrique. Reprenant la terminologie de Charles Sanders Peirce, Carter considère les diagrammes comme des « icônes », cette dimension iconique étant précisément ce qui permet la traduction d'une preuve diagrammatique en une preuve algébrique. Par ailleurs, le texte qui accompagne le diagramme dans une preuve joue un rôle essentiel, car la preuve doit être vue comme constituée à la fois du diagramme *et* du texte pris comme un tout, le texte permettant de clarifier toute ambiguïté potentielle concernant l'interprétation du diagramme associé. Carter souligne enfin que les diagrammes nous permettent de fractionner les preuves en parties plus faciles à appréhender : en utilisant les diagrammes, les mathématiciens peuvent se concentrer sur des détails spécifiques de la preuve, mettant de côté certaines informations qui ne seraient pas directement pertinentes (Carter [2012]).

Irina Starikova s'est intéressée à l'utilisation des graphes de Cayley dans la théorie géométrique des groupes (voir Starikova [2010, 2012]). Ces représentations visuelles sont particulièrement intéressantes du point de vue épistémologique car elles ont joué un rôle essentiel dans la découverte de nouvelles propriétés des groupes. Plus spécifiquement, l'introduction des graphes de Cayley a permis de concevoir les groupes comme des espaces métriques, et ainsi de faire apparaître certaines similarités perceptives correspondant à des propriétés géométriques des groupes auxquelles on n'aurait pas eu directement accès dans le cadre d'une perspective purement algébrique. Cette approche a notamment conduit à l'introduction de nouveaux concepts clés tels que ceux de quasi-isométrie et de groupe hyperboliques. Le cas spécifique de l'utilisation des graphes de Cayley en théorie des groupes montre ainsi comment le choix approprié d'une représentation diagrammatique d'un objet ou d'un concept mathématique peut donner lieu à des développements mathématiques substantiels.

Silvia De Toffoli et Valeria Giardino ont analysé l'utilisation des diagrammes en théorie des nœuds[17], et ont proposé un cadre philosophique au sein duquel les diagrammes sont conçus non seulement comme outils visuels, mais également comme instruments *kinesthésiques* (De Toffoli et Giardino [2014]). Dans la pratique, tout expert en théorie des nœuds doit être en mesure d'imaginer, à partir d'un diagramme de nœuds, les différentes transformations qui peuvent s'y rapporter — voir Figure 2 pour des exemples de transformations élémentaires. Ces experts ont acquis une forme d'imagination qui leur permet de ré-écrire les diagrammes et de les utiliser comme outils de calcul, en ayant recours à ce que l'on pourrait appeler des « actions épistémiques »[18]. Cette « imagination manipulatoire » trouve son origine dans notre interaction avec les objets concrets et dans notre familiarité avec leur manipulation ; elle prend une forme plus sophistiquée dès lors qu'elle s'applique à de nouveaux objets représentationnels tels que les diagrammes de nœuds. Il est important de souligner que l'aspect kinesthésique de ces diagrammes apparaît seulement lorsque le diagramme est *interprété*. Ce n'est que sur la base de cette interprétation que l'expert sera en mesure de fixer l'espace dans lequel le diagramme habite, et ainsi de déterminer ses transformations possibles. Cette interaction avec les diagrammes joue un rôle fondamental dans les preuves en théorie de nœuds. La formalisation de ces preuves conduirait inévitablement à faire disparaitre cette dimension, produisant ainsi une image déformée de la pratique[19].

17. La théorie des nœuds est une branche de la topologie qui étudie les nœuds mathématiques, où un *nœud* est défini comme le plongement d'un cercle dans $\mathbb{R}^3$ — un nœud est donc une courbe dans l'espace. Par rapport aux nœuds physiques, les nœuds mathématiques n'ont aucune épaisseur (une courbe possède une seule dimension) et sont fermés sur eux-mêmes (les bouts de la courbe sont « collés » ensemble).

18. Nous reviendrons sur la notion d'action épistémique dans la prochaine section.

19. Sur des thèmes voisins, voir De Toffoli [2017] ainsi que le chapitre 4 de ce volume qui abordent l'exemple clé des diagrammes commutatifs en algèbre homologique et en théorie des catégories.

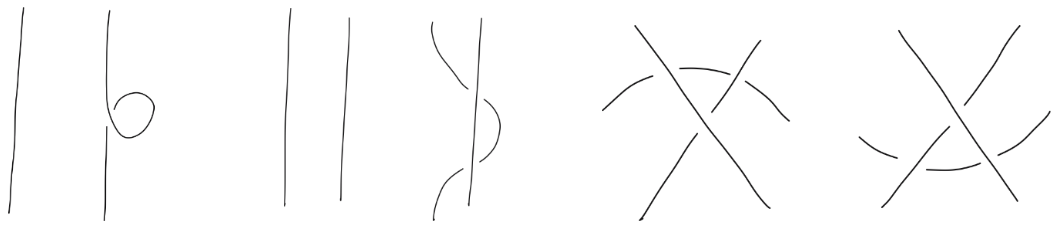

FIGURE 2 – Trois transformations élémentaires sur les nœuds connues sous le nom de *mouvements de Reidemeister*. Ces mouvements locaux transforment un diagramme de nœud en un diagramme de nœud équivalent, c'est-à-dire, représentant le même nœud.

Ces différentes études de cas montrent que, malgré les critiques de la visualisation en mathématiques évoquées précédemment, la pensée visuelle s'avère jouer un rôle épistémique essentiel au sein de plusieurs pratiques mathématiques contemporaines. Il s'ensuit que l'épistémologie des mathématiques se doit de fournir un cadre épistémologique qui permette de rendre compte de la nature et du rôle de la visualisation dans la pratique mathématique.

4. Les artefacts dans la pratique mathématique

Dans la perspective de développer une épistémologie des mathématiques plus fidèle à la pratique, la philosophie de la pratique mathématique est amenée à rendre compte des divers *outils* employés par les mathématiciens dans la poursuite de leurs objectifs épistémiques. Ces outils constituent des « artefacts » au sens où (1) ils font partie intégrante d'une pratique mathématique donnée dont ils sont le produit, et (2) ils peuvent supporter un répertoire d'actions contrôlées — un artefact est un objet voué à être observé, modifié, manipulé, etc.

Dans cette section, nous rapporterons, tout d'abord, les éléments principaux des recherches de Reviel Netz et Kenneth Manders sur les artefacts présents dans la pratique géométrique de la Grèce ancienne.[20] Nous nous intéresserons ensuite à plusieurs études récentes qui ont abordé la question des aspects

20. La nature et l'utilisation des diagrammes dans la géométrie grecque, et dans les *Éléments* d'Euclide en particulier, font l'objet d'une littérature importante en philosophie de la pratique mathématique. Deux questions clés sur ce sujet concernent la formalisation du raisonnement diagrammatique dans les démonstrations géométriques des *Éléments* d'Euclide (voir Miller [2007], Mumma [2006, 2010], et Avigad *et al.* [2009]) et la relation entre objets géométriques et les diagrammes qui les représentent (voir Panza [2012]).

épistémologiques et des compétences cognitives relatifs à l'utilisation d'un exemple clé d'artefact mathématique : la notation symbolique.

4. 1 Les artefacts dans la pratique géométrique en Grèce ancienne

Dans son ouvrage désormais classique, Netz s'est donné pour objectif de reconstruire ce qu'il appelle l'« histoire cognitive » de l'utilisation des textes et diagrammes dans les mathématiques grecques (Netz [1999]). Netz situe l'histoire cognitive à l'intersection entre histoire des sciences et sciences cognitives : elle est à la fois analogue à l'histoire des sciences dans le sens où elle traite des artefacts culturels, mais également comparable aux sciences cognitives dans la mesure où elle s'intéresse à la connaissance en tenant compte des formes qu'elle prend au sein de pratiques scientifiques stabilisées. L'objectif recherché est l'analyse de la pratique des sciences et l'influence qu'elle peut avoir sur les possibilités cognitives des sciences ; son étude de cas concerne spécifiquement la pratique géométrique en Grèce ancienne.

Selon Netz, il était impossible dans la géométrie grecque de se dispenser du diagramme et de considérer seulement l'information fournie par le texte. Netz identifie l'utilisation des « diagrammes avec lettres » (*lettered diagrams*) comme la marque distinctive des mathématiques grecques, ce type d'artefact n'ayant été développé par aucune autre culture précédemment. Le diagramme avec lettres peut être considéré à différents niveaux : au niveau logique, il est constitué par un élément *continu* — le diagramme — et un élément *discret* — les lettres qui lui sont ajoutées ; au niveau cognitif, il est un mixte de ressources visuelles auxquelles il fait appel et d'un ensemble fini de modèles auxquels on accède grâce aux lettres ; au niveau sémiotique, il associe une *icône* — le diagramme — à certains *indexes* — les lettres ; enfin, le diagramme avec lettres peut aussi être considéré d'un point de vue historique. Dans ce cadre complexe, les diagrammes avec lettres combinent une certaine familiarité vis-à-vis de leur construction — renvoyant à des pratiques techniques à but purement utilitariste — et une réflexivité plus sophistiquée en ce qui concerne ce à quoi les lettres font allusion.

La multidimensionnalité du diagramme avec lettres, intégrant des éléments presque antagonistes, fait de lui un outil très avantageux pour la promotion et la justification de la déduction. Selon Netz, les mathématiques grecques sont précisément caractérisées par le fait que les preuves s'effectuent au niveau de cet objet *physique* — il n'est aucunement nécessaire de supposer l'existence d'un objet abstrait correspondant. Dans son analyse, une preuve dans la pratique grecque est un événement qui se passe sur le papyrus ou dans une communication orale. Le langage se réfère au diagramme comme à un objet construit et manipulable, et ceci le rend *kinesthésique* : une construction particulière, donnée par le diagramme avec lettres, peut ainsi être répétée, et c'est précisément dans cette *répétabilité* que réside la certitude de la preuve. Les preuves dans la pratique grecque se basent donc sur une invariance *pratique*, et leur généralité existe seulement sur un plan *global* : un théorème est prouvé avec tout le système des mathématiques grecques en arrière-plan.

Un autre texte particulièrement influent pour l'étude des artefacts dans la pratique géométrique en Grèce ancienne est Manders [2008], qui s'est focalisé tout particulièrement sur l'analyse des diagrammes dans les *Éléments* d'Euclide. Selon Manders, la pratique géométrique d'Euclide repose sur une division des tâches entre deux composants — le *diagramme* et le *texte* — qui opèrent de concours dans les démonstrations géométriques. Une démonstration dans les *Éléments* apparaît sous la forme d'une séquence d'assertions mathématiques, chaque assertion reposant sur une ou plusieurs des assertions qui la précèdent ainsi que sur le diagramme. Une des contributions majeures de Manders est d'avoir offert une théorie précise de la manière dont les diagrammes peuvent être utilisés dans ces étapes de démonstrations.

Sa théorie repose sur une distinction fondamentale entre les attributs *exacts* et *co-exacts* d'un diagramme (voir Figure 3). Les attributs *co-exacts* sont ceux qui subsistent à toute déformation « raisonnable » du diagramme — *e.g.*, l'inclusion d'une région dans une autre, ou l'intersection de deux cercles comme dans la proposition 1 du livre I des *Éléments* — les attributs *exacts* sont ceux qui, à l'exception de cas isolés, ne résistent jamais à la moindre déformation du diagramme — *e.g.*, l'égalité de deux segments, ou le fait qu'une droite soit tangente à un cercle. Il est à noter que certaines assertions basées entièrement, ou en partie, sur le diagramme — ce que Manders appelle « attributions diagrammatiques » — peuvent avoir à la fois une dimension exacte et co-exacte — *e.g.*, juger un objet diagrammatique comme un triangle implique que cet objet constitue une région non-vide délimitée par trois segments (co-exact), et que ces trois segments soient parfaitement droits (exact).

Selon Manders, Euclide fait *exclusivement* appel aux propriétés co-exactes des diagrammes dans le cadre de ses attributions diagrammatiques. Pour en comprendre la raison, il faut revenir à ce qui constitue pour Manders une des caractéristiques essentielles du succès de toute pratique mathématique, à savoir

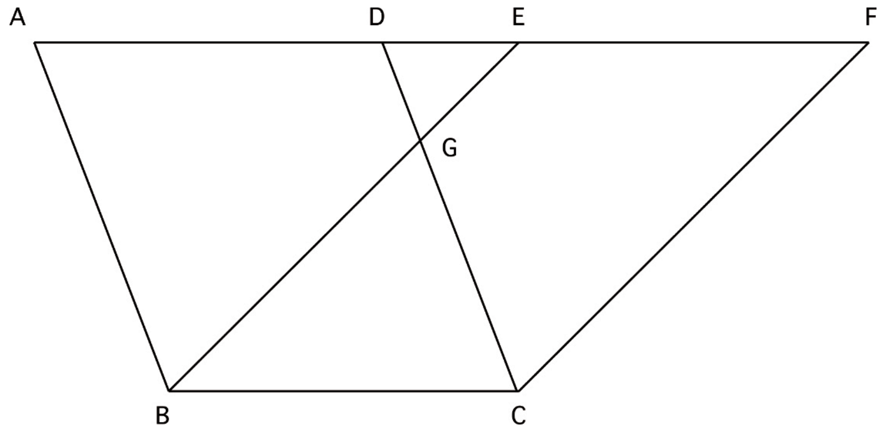

Figure 3 – Le diagramme associé à la proposition 35 du livre I des *Éléments* d'Euclide tel que représenté par Vitrac (voir Euclide d'Alexandrie [1990], p. 262). La proposition 35 énonce que « [l]es parallélogrammes qui sont sur la même base et dans les mêmes parallèles sont égaux entre eux ». Dans ce diagramme, l'égalité des segments *AD* et *EF* est un attribut exact, alors que le fait que le segment *DE* soit contenu dans le segment *AE* est un attribut co-exact. Mumma discute cet exemple de manière détaillée (voir Mumma [2010], p. 264-267).

d'éviter que la pratique tombe en *désarroi*, *i.e.*, que les participants se retrouvent dans une situation où ils seraient dans l'incapacité de résoudre leurs désaccords éventuels. Dans le cas spécifique de la pratique diagrammatique des *Éléments*, un tel désarroi pourrait avoir pour origine l'incapacité des participants à tomber d'accord sur les attributions diagrammatiques. Or, les attributs exacts étant particulièrement instables sous la production concrète de diagrammes géométriques, il serait quasiment impossible pour les participants de produire et de juger de telles propriétés sans générer une instabilité forte en ce qui concerne les attributions diagrammatiques. Le fait que les attributs co-exactes soient stables sous toute déformation raisonnable du diagramme est donc précisément ce qui assure la possibilité de faire appel aux propriétés co-exactes des diagrammes sans générer de désaccord. Pour que la pratique ne tombe pas en désarroi, il est néanmoins nécessaire que la production des diagrammes réponde à certaines règles implicites — ce que Manders appelle la « discipline diagrammatique » — tout diagramme dont la production concrète ne répond pas à ces règles peut ainsi être rejeté par les participants. Le recours exclusif aux attributs co-exacts et la présence d'une discipline diagrammatique sont ainsi les deux caractéristiques qui assurent le succès de la pratique géométrique des *Éléments* d'Euclide, et plus particulièrement le fonctionnement conjoint des deux types d'artefacts qui la constituent — le diagramme et le texte[21].

4. 2 Les notations comme artefacts : aspects épistémologiques

Les notations symboliques utilisées par les mathématiciens constituent l'un des exemples les plus remarquables d'artefact mathématique : ce sont des outils matériels qui font partie intégrante des pratiques mathématiques auxquelles elles appartiennent, et qui sont voués à supporter ce que l'on appelle communément des *manipulations symboliques*. En pratique, une notation symbolique non seulement incarne certains contenus mathématiques, mais sert également d'appui à un ensemble d' « actions épistémiques ».

Mark Colyvan a dédié un chapitre de sa récente introduction à la philosophie des mathématiques, Colyvan [2012], à la question des notations mathématiques. Colyvan observe que certaines notations jouent un rôle à la fois algébrique et géométrique, d'une part en supportant différentes opérations de calcul, et d'autre part en servant d'instructions pour la construction des objets mathématiques considérés. Selon lui, la marque d'une notation effective est ainsi d'accomplir un *travail cognitif* substantiel pour le mathématicien. Danielle Macbeth s'est, quant à elle, intéressée plus largement aux systèmes de signes en mathématiques — subsumant les notations symboliques — et s'est attachée à défendre l'idée que les signes exhibent d'eux-mêmes certains éléments de raisonnement mathématique, les plaçant « devant nos yeux » d'une manière qui serait tout simplement impossible en ayant recours uniquement aux resources du langage naturel (voir Macbeth [2012]).

Dans un article récent, Helen De Cruz et Johan De Smedt ont proposé une conception des manipulations symboliques comme « actions épistémiques » (De Cruz et De Smedt [2013]), dans le sens de David Kirsh et Paul Maglio (voir Kirsh et Maglio [1994]). Selon ces derniers, une action épistémique est une action qui utilise des éléments de l'environnement, comme par exemple la transformation d'un certain artefact, pour améliorer la *compréhension* de la tâche effectuée. Dans le cas particulier des mathématiques, De Cruz et De Smedt ont ainsi défendu l'idée que les symboles mathématiques — figures ou formules —

21. Les travaux de Netz et Manders ont été récemment discutés par David Rabouin (voir Rabouin [2018]), qui les a mis en relation d'une part avec son interprétation d'une logique de l'imagination chez Descartes, et d'autre part avec les recherches de l'anthropologue Edwin Hutchins sur la matérialité des artefacts et leur rôle en tant que supports au raisonnement (Hutchins [2005]).

nous permettent d'avoir accès à certaines opérations mathématiques — actions épistémiques — qui permettent à l'expert d'effectuer de nouvelles inférences, et par là même d'atteindre de nouvelles conclusions.

4. 3 Les notations comme artefacts : analyses cognitives

Plusieurs chercheurs en sciences cognitives se sont récemment intéressés aux compétences cognitives impliquées dans la compréhension et l'utilisation des notations symboliques. Landy et Goldstone ont notamment conduit plusieurs études expérimentales visant à évaluer l'influence du caractère matériel des symboles mathématiques sur notre capacité à nous en servir (Landy et Goldstone [2007]). Suivant une idée répandue, pour utiliser correctement une notation symbolique, il suffirait de connaître : (i) la signification de chaque symbole et (ii) les règles formelles que l'on peut lui appliquer. Cependant, les symboles sont des objets physiques qui sont *perçus* par les praticiens ; il s'agit alors de savoir si cela peut avoir des conséquences sur la manière dont les notations symboliques sont déchiffrées et les règles formelles appliquées. Pour aborder cette question, Landy et Goldstone ont construit une expérience dans laquelle ils ont demandé à leurs participants d'évaluer la validité d'un certain nombre d'équations contenant des additions et des multiplications, et dont la présentation avait fait l'objet d'une manipulation — par exemple, des espaces, des lignes, ou des cercles, avaient été ajoutés entre les symboles, afin de modifier l'apparence physique des équations présentées. Leur hypothèse est que l'ajout de ces « signaux » a une influence directe sur la capacité des participants à lire et à raisonner avec les symboles, dans la mesure où ils affectent directement les mécanismes généraux de regroupement perceptif qui, selon eux, sont au cœur de notre capacité à interagir avec les notations symboliques. Par exemple, un espace ajouté entre deux symboles liés par le signe de la multiplication générerait des difficultés de lecture en encourageant les participants à « segmenter » la formule d'une manière qui n'est pas en accord avec l'ordre correct des opérations — la multiplication est prioritaire sur l'addition — alors qu'un regroupement allant dans le sens de la priorité — par exemple un cercle entourant deux facteurs à multiplier — faciliterait la tâche à réaliser. Les résultats de cette expérience confirment cette hypothèse, et suggèrent donc que l'apparence physique des équations a une influence directe sur nos capacités cognitives à les comprendre et les utiliser.

Sur la base de ces travaux et d'autres similaires, l'article Landy *et al.* [2014] propose plus récemment une théorie des « manipulations perceptives », selon laquelle la plupart du raisonnement symbolique émerge de la perception et de la manipulation physique des notations symboliques — les notations serviraient ainsi de « cibles » pour l'activation de systèmes perceptifs et sensorimoteurs. D'autres chercheurs ont également souligné l'importance de l'apprentissage « perceptif » en mathématiques. L'article Kellman *et al.* [2010] a notamment mis en évidence que, dans de très nombreux domaines scientifiques, y compris les mathématiques, cette forme d'apprentissage est déterminante car elle permet à l'étudiant d'améliorer ses capacités à saisir les informations pertinentes dans la résolution de problèmes. Pourtant, la pédagogie des mathématiques a majoritairement considéré l'apprentissage perceptif hors de propos en ce qui concerne les raisonnements mathématiques avancés, et le raisonnement symbolique en particulier. Une approche plus perceptive ouvrirait donc la voie à de nouvelles méthodes d'enseignement — les étudiants pourraient, par exemple, être formés à reconnaître les expressions algébriques en utilisant des techniques standards d'apprentissage perceptif — dans l'hypothèse que cela générerait un gain durable dans la lecture et dans la compréhension des équations ainsi que dans la résolution de problèmes algébriques.

Ces observations n'impliquent pas que le raisonnement mathématique se réduise entièrement à des mécanismes perceptifs, ou que les manipulations symboliques soient guidées uniquement par des regroupements perceptifs. Cependant, elles mettent en avant des phénomènes cognitifs importants qui font pour la première fois l'objet d'une recherche systématique, et qui doivent être pris en compte dans le cadre des discussions épistémologiques sur la nature de la notation symbolique comme artefact de la pratique mathématique.

5. Mathématiques et informatique

Le développement de l'informatique a eu, et continue d'avoir, un impact majeur sur la pratique mathématique. Une des illustrations les plus remarquables de ce phénomène reste à ce jour la preuve assistée par ordinateur du théorème des quatre couleurs produite par Kenneth Appel et Wolfgang Haken (voir Appel et Haken [1977] ; Appel *et al.* [1977]), dans laquelle un programme informatique est utilisé dans une stratégie visant à éliminer tout contre-exemple possible au théorème, et ce en étudiant un ensemble fini de cas critiques[22]. L'utilisation des ordinateurs dans la pratique mathématique ne se réduit cependant pas à cet exemple notable, mais apparaît au contraire sous un grand nombre de formes diverses et variées, par exemple : l'utilisation de systèmes de calcul formel pour les manipulations symboliques tels que Maple ou Mathematica ; l'utilisation de calculs ou de simulations numériques pour résoudre des problèmes scientifiques ou d'ingénierie ; l'utilisation d'assistants de preuve pour la vérification formelle des preuves mathématiques. Toute philosophie des mathématiques qui se veut fidèle à la pratique mathématique se doit de rendre compte du rôle des ordinateurs et de l'informatique dans le développement de la connaissance mathématique, et d'aborder les challenges philosophiques qui s'y rattachent[23]. Dans cette section, nous reviendrons sur deux questions qui ont suscité un intérêt particulier, et ont donné lieu à une discussion approfondie, en philosophie des mathématiques : le statut épistémologique des preuves probabilistes, et la nature des mathématiques expérimentales[24].

5. 1 Preuves probabilistes

La notion de « preuve probabiliste » désigne une famille de méthodes permettant d'établir des propositions mathématiques, dont la caractéristique principale est de reposer sur l'utilisation d'*algorithmes probabilistes*. Les deux exemples de preuves probabilistes ayant reçu le plus d'attention dans la littérature philosophique concernent (1) les algorithmes probabilistes faisant appel à des tech-

22. Le théorème des quatre couleurs énonce qu'il est toujours possible de colorier n'importe quelle carte, en n'utilisant que quatre couleurs différentes, de manière à ce que toute paire de régions possédant une frontière commune soit coloriée de couleurs différentes. Nous ne reviendrons pas ici sur les discussions philosophiques concernant la preuve du théorème des quatre couleurs. Le lecteur intéressé par ce sujet est invité à consulter Tymoczko [1979], Detlefsen et Luker [1980], et Teller [1980].

23. Pour une présentation générale et contemporaine des questions philosophiques générées par l'utilisation des ordinateurs dans la pratique mathématique, voir Avigad [2008a].

24. En plus de ces deux questions, il est intéressant de mentionner également l'essor actuel de la *vérification formelle*, qui consiste à utiliser ce que l'on appelle des assistants de preuve afin de formaliser entièrement des preuves mathématiques informelles, un sujet que nous avons déjà évoqué dans la note en bas de page numéro 12. L'intérêt philosophique de ces développements a été souligné par Avigad, qui en a exploré le potentiel philosophique pour le développement d'une théorie de la compréhension mathématique (Avigad [2008b, 2010]), ainsi que pour l'analyse des jugements de valeur en mathématiques (Avigad [2006]). La vérification formelle apparaît ainsi comme une autre source importante de questions philosophiques, situées à la croisée de la logique, de l'informatique, et des fondements des mathématiques. Pour des raisons d'espace, nous n'aborderons pas ces questions dans cette section, et nous renvoyons le lecteur aux références que nous venons de citer.

nologies ADN et permettant de résoudre des problèmes combinatoires, comme établir l'absence de chaînes hamiltoniennes dans un graphe orienté donné[25], (2) le test de primalité de Miller-Rabin qui, étant donné un nombre entier n, permet d'établir soit que n est un nombre composé, et ceci de façon certaine, soit que n est probablement un nombre premier[26]. Ces deux types d'algorithmes probabilistes permettent d'établir des propositions mathématiques avec un niveau élevé de probabilité, ce niveau n'ayant d'ailleurs pas de borne supérieure, dans la mesure où il est toujours possible de répéter l'exécution de ces algorithmes afin d'augmenter le niveau de probabilité associé à la réponse obtenue.

Dans la pratique mathématique, il est communément admis que les preuves probabilistes ne constituent pas un moyen *légitime* d'acquérir de la connaissance mathématique, bien qu'elles puissent apporter des informations tout à fait utiles et significatives concernant certaines propositions mathématiques. En opposition à cette idée, Don Fallis a défendu la thèse selon laquelle le rejet des preuves probabilistes par les mathématiciens ne repose sur aucune raison d'ordre *épistémique* (voir Fallis [1997]). En d'autres termes, Fallis considère que tout désavantage épistémique qui pourrait être attribué aux preuves probabilistes est d'ores et déjà présent dans les méthodes de démonstration standards acceptées par les mathématiciens.

En vue de défendre cette thèse, Fallis développe une argumentation procédant, pour ainsi dire, par élimination : afin de démontrer qu'il n'y a pas de différence d'ordre épistémique entre les preuves probabilistes et les méthodes communément acceptées par les mathématiciens, Fallis considère un ensemble de propriétés épistémiques qui pourraient être attribuées aux méthodes standards acceptées par les mathématiciens mais pas aux preuves probabilistes, et démontre dans chaque cas que : soit cette propriété n'est pas présente dans certaines méthodes acceptées par les mathématiciens ; soit les preuves probabilistes ont cette propriété ; soit cette propriété n'est pas épistémiquement significative.

25. Un *graphe orienté* est composé d'un ensemble de *sommets* et d'un ensemble d'*arcs*, un arc étant défini comme un couple de sommets. Une suite de sommets forme un *chemin* s'il existe un arc entre chaque sommet consécutif. Un chemin est dit *hamiltonien* dès lors qu'il passe par tous les sommets une et une seule fois.

26. Par manque d'espace, nous ne pouvons décrire ici le fonctionnement de ces deux méthodes probabilistes. Nous renvoyons respectivement à Adleman [1994] et Rabin [1980] pour les présentations originelles de ces deux méthodes, ainsi qu'aux descriptions plus accessibles fournies par Fallis [1997] et Easwaran [2009].

La première propriété considérée par Fallis est la suivante : alors que les méthodes de démonstration acceptées par les mathématiciens permettent, en principe, d'établir une proposition mathématique avec une *certitude absolue*, les preuves probabilistes conduisent à des arguments qui contiennent, par nature, une part inhérente d'incertitude, bien que cette incertitude puisse être réduite en répétant l'algorithme probabiliste considéré. À ceci Fallis répond que les preuves déductives ne permettent pas d'atteindre une certitude absolue, dans la mesure où le mathématicien reste un agent épistémique *faillible*, pouvant potentiellement commettre des erreurs, ce qui l'amène à conclure que, tout comme les preuves probabilistes, les méthodes standards acceptées par les mathématiciens contiennent également une part inhérente d'incertitude.

Une seconde propriété consisterait à dire que les preuves déductives permettent d'établir une proposition mathématique de manière *a priori* — *i.e.*, indépendamment de toute expérience avec le monde extérieur — ce qui ne serait pas le cas pour les preuves probabilistes, dans la mesure où une preuve probabiliste nécessite l'exécution d'un algorithme probabiliste. Fallis rejète cette propriété en considérant différentes manières de définir la notion de justification *a priori*, et en montrant, dans chaque cas, que la notion considérée ne permet pas de différencier entre preuves déductives et preuves probabilistes.

Fallis examine une troisième propriété selon laquelle les preuves déductives, contrairement aux preuves probabilistes, sont telles que (1) une suite d'étapes déductives conduisant à la proposition mathématique à établir est effectivement construite, et (2) chacune de ces étapes déductives est susceptible d'être vérifiée par un mathématicien. Fallis fait ici remarquer que la communauté des mathématiciens est parfois conduite à accepter une proposition mathématique (1) sur la base de l'*esquisse* d'une preuve — *i.e.*, une preuve qui n'est pas effectivement construite — par exemple dans le cas de l'acceptation du second théorème de Gödel à partir de l'esquisse fournie dans Gödel [1931], et (2) sur la base d'une preuve qui est effectivement construite, mais pour laquelle l'ensemble des étapes déductives qui la constitue n'est pas susceptible d'être vérifié par un mathématicien, comme la preuve du théorème des quatre couleurs où, comme nous le mentionnions précédemment, une partie des étapes déductives est effectuée par un ordinateur.

Dans une autre contribution consacrée à ce sujet, Fallis a développé une seconde ligne d'argumentation, dont l'idée principale est d'évaluer si certains objectifs poursuivis par les mathématiciens permettraient d'expliquer ce choix méthodologique consistant à accepter les preuves déductives et à rejeter les preuves probabilistes (voir Fallis [2002]). Cette ligne d'argumentation procède également par élimination : Fallis considère un ensemble d'objectifs qui pourraient être avancés pour justifier un tel choix, et montre qu'aucun de ces objectifs apporte une justification appropriée.

Pour contrer l'argumentation de Fallis, il suffit d'identifier un critère, ou un objectif, d'ordre épistémique qui puisse permettre d'établir une différence entre preuves déductives et preuves probabilistes. Poursuivant cette approche, Kenny Easwaran a proposé un nouveau critère, non considéré précédemment par Fallis, qu'il nomme *transférabilité*. Selon Easwaran [2009], un argument mathématique est *transférable* dès lors qu'un lecteur possédant l'expertise nécessaire est en mesure de vérifier *par lui-même* l'ensemble des étapes déductives, ainsi que l'ensemble des prémisses, de l'argument mathématique considéré. Les preuves déductives sont clairement transférables, car il doit toujours être possible pour le lecteur compétent d'évaluer l'ensemble des étapes déductives, ainsi que l'ensemble des prémisses, d'une preuve déductive donnée. Les preuves probabilistes ne sont, en revanche, pas transférables, car le lecteur doit accepter, dans ce cas, le résultat de une ou plusieurs exécutions d'un algorithme probabiliste réalisées par une personne tierce. L'avantage épistémique d'un argument transférable est donc de pouvoir être vérifié dans sa totalité, sans avoir à s'appuyer sur le témoignage d'une tierce personne.

Le critère de transférabilité ne fait cependant pas l'unanimité, et a été critiqué dans la littérature par Jackson [2009] et Fallis [2011]. La question du statut épistémologique des preuves probabilistes reste donc ouverte. À charge au défenseur des preuves déductives d'identifier un critère épistémique permettant d'établir l'avantage épistémique des preuves déductives sur les preuves probabilistes, et au défenseur des preuves probabilistes de remettre en cause tout critère qui pourrait être proposé à cette fin.

5. 2 Mathématiques expérimentales

Les *mathématiques expérimentales* désignent une certaine approche au sein de la recherche mathématique dont la caractéristique principale est « l'utilisation de technologies de calcul avancées », où « l'ordinateur munit le mathématicien d'un "laboratoire" dans lequel il peut conduire des expériences, telles que : analyser des exemples, tester de nouvelles idées, ou rechercher des patterns » (Borwein et Bailey [2004], p. 2). De telles techniques ont permis notamment la découverte de nombreuses formules, comme par exemple la formule dite de

Bailey-Borwein-Plouffe ou BBP :

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k} \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right)$$

qui est à la base d'une méthode permettant de calculer le n-ième chiffre après la virgule de la constante π en base 2 (système binaire) ou base 16 (système hexadécimal), et ce sans avoir à calculer les autres chiffres qui le précèdent. Les mathématiques expérimentales constituent aujourd'hui une branche établie de la recherche mathématique[27].

L'émergence des mathématiques expérimentales a attiré l'attention de plusieurs philosophes des mathématiques, et il n'est pas difficile de comprendre pourquoi : il est traditionnellement considéré que la notion d'expérience ne joue aucun rôle dans le développement des mathématiques, dans la mesure où la connaissance mathématique est *a priori*, et par conséquent ne nécessite aucune interaction avec le monde extérieur. De ce point de vue, la notion même de mathématiques expérimentales apparaît comme tout bonnement contradictoire — comme le souligne Baker [2008] — et pour cette raison appelle à une analyse épistémologique.

Plusieurs questions en lien avec les mathématiques expérimentales ont ainsi été abordées dans la littérature philosophique contemporaine. Dans cette section, nous traiterons des questions suivantes : qu'est-ce qu'une expérience mathématique ? comment caractériser les mathématiques expérimentales ? les mathématiques expérimentales remettent-elles en cause le statut *a priori* des mathématiques ?

L'un des premiers, si ce n'est le premier, à s'être intéressé à l'existence éventuelle d'une notion d'expérience en mathématiques est le philosophe belge Jean Paul van Bendegem. Dans une contribution pionnière sur ce sujet, van Bendegem [1998] a approché la question en considérant deux manières différentes dont la locution « expérience mathématique » est utilisée *par les mathématiciens eux-mêmes*, et en examinant, dans chaque cas, si l'on pouvait vraiment parler d'expérience mathématique. Van Bendegem remarque, tout d'abord, que cette locution est parfois utilisée en référence à certaines séries de calculs — effectués ou non à l'aide d'un ordinateur — pouvant intervenir en support à une proposition mathématique donnée. Dans la mesure où tout calcul peut être transformé

27. Pour une présentation générale des mathématiques expérimentales, nous renvoyons aux deux ouvrages de référence Borwein *et al.* [2004] et Borwein et Bailey [2004]. Pour une exposition à la fois concise et pédagogique, nous renvoyons à l'article Bailey et Borwein [2005].

en une séquence d'étapes déductives, *i.e.*, en une preuve mathématique traditionnelle, van Bendegem considère que l'on ne peut pas vraiment parler ici d'expérience, puisque de telles séries de calculs ne diffèrent pas des méthodes mathématiques traditionnelles. Van Bendegem observe, par ailleurs, que la locution « expérience mathématique » est également utilisée pour désigner toute forme de manipulation dans le monde extérieur permettant d'établir une proposition mathématique. Peut-être l'exemple le plus simple d'une telle expérience consisterait en la manipulation d'objets discrets afin de vérifier des équations arithmétiques : par exemple, une expérience en vue d'établir l'équation « $2 + 3 = 3 + 2$ » consisterait à assembler d'une part 2 et 3 objets, et d'autre part 3 et 2 objets, et à observer que la même quantité d'objets est obtenue dans les deux cas[28]. Bien que ce type de manipulations pourrait légitimement recevoir le qualificatif d'expérience mathématique, van Bendegem considère que les cas existants sont relativement insignifiants au sein de la pratique mathématique, les résultats de telles manipulations apparaissant le plus souvent comme mathématiquement inutiles. L'analyse de van Bendegem aboutit ainsi à la conclusion que, derrière l'utilisation de la locution « expérience mathématique » par les mathématiciens eux-même, il n'y a pas, d'un point de vue épistémologique, de notion significative d'expérience mathématique[29].

Bien que l'on pourrait imaginer que ce qui caractérise les mathématiques expérimentales serait justement le recours à de telles expériences mathématiques, l'absence d'une notion épistémologiquement légitime d'expérience mathématique semble compromettre cette possibilité. Rejetant également cette manière de caractériser les mathématiques expérimentales, Baker propose une approche alternative qu'il qualifie de *fonctionnelle* [voir Baker [2008]), et qui consiste à identifier une ou plusieurs caractéristiques communes à la fois au fonctionnement des mathématiques expérimentales au sein des mathématiques, et au fonctionnement des expériences au sein des sciences empiriques. Baker identifie, de prime abord, deux candidats potentiels : le fait que l'*utilisation des ordinateurs* dans les mathématiques expérimentales est similaire à l'utilisation d'instruments dans les sciences expérimentales ; le fait que les techniques des mathématiques expérimentales ne fournissent qu'un *support inductif* à une proposition mathématique, de la même manière qu'une expérience scientifique ne permet d'apporter qu'un support inductif à une hypothèse ou une

28. Pour des exemples plus sophistiqués de manipulations, voir van Bendegem [1998].

29. Cela ne veut pas dire qu'il n'y aurait pas de notion d'expérience mathématique qui pourrait s'avérer fructueuse pour une conception des mathématiques *différente* de celle des mathématiciens eux-mêmes. Cette ligne est développée par van Bendegem dans un second article (van Bendegem [1996]), dans le cadre d'une conception fictionaliste des mathématiques.

théorie donnée. Baker considère, cependant, qu'aucune de ces deux caractéristiques n'est *essentielle* aux mathématiques expérimentales, dans la mesure où certaines activités appartenant aux mathématiques expérimentales n'ont pas recours à l'utilisation d'ordinateurs — comme certaines activités d'exploration mathématique précédant l'existence des ordinateurs — tandis que d'autres ne visent pas à apporter un support inductif à des propositions mathématiques — par exemple la recherche de nouvelles conjectures. Baker suggère alors une troisième possibilité : la caractéristique essentielle des mathématiques expérimentales résiderait dans le *calcul de cas particuliers*, ce qui serait fonctionnellement similaire au fait que les expériences scientifiques ne font qu'évaluer certains cas particuliers d'hypothèses plus générales. Sous réserve que cette caractérisation soit correcte, et dans la mesure où il n'y a rien de philosophiquement problématique dans le calcul de cas particuliers, Baker conclut alors que les mathématiques expérimentales ne remettent pas en cause les conceptions philosophiques traditionnelles des mathématiques, et plus spécifiquement le caractère *a priori* et déductif des mathématiques.

La question d'une éventuelle remise en cause du statut *a priori* des mathématiques par les mathématiques expérimentales a également fait l'objet d'une analyse dédiée par Mark McEvoy (voir McEvoy [2013]). La thèse défendue par McEvoy rejoint la conclusion de Baker, à savoir que les mathématiques expérimentales ne remettent pas en cause le caractère *a priori* des mathématiques, *i.e.*, l'idée que la connaissance mathématique est obtenue par des méthodes *a priori*[30]. Pour étayer cette thèse, McEvoy considère différentes caractéristiques des mathématiques expérimentales qui potentiellement pourraient introduire un élément *a posteriori*, comme : la présence d'expériences mathématiques ; l'utilisation de méthodes inductives ; l'utilisation de méthodes probabilistes ; l'utilisation des ordinateurs ; le calcul de cas particuliers ; et le recours à des preuves par ordinateurs tellement longues qu'il est impossible pour tout être humain de les examiner dans leur totalité. McEvoy conclut, dans chaque cas, que le statut *a priori* des mathématiques n'est pas menacé par la caractéristique considérée[31].

Outre les questions que nous venons d'aborder, peut-être un des aspects de la pratique des mathématiques expérimentales les plus intéressants d'un point de vue épistémologique réside dans leur capacité à incarner une forme d'*exploration* mathématique. Une première analyse de cette dimension explora-

30. McEvoy définie une méthode comme *a priori* dès lors qu'elle ne nécessite — de manière *essentielle* — aucun recours à l'expérience sensorielle.

31. Pour des raisons d'espace, nous ne revenons pas ici sur les arguments développés par McEvoy, et nous renvoyons le lecteur intéressé à McEvoy [2013].

toire a été proposée par Sørensen [2010], qui a étudié la manière dont l'utilisation de l'algorithme PSLQ[32] — une des techniques phares des mathématiques expérimentales — permettait l'identification de nouvelles conjectures et la formation de nouveaux concepts, indiquant ainsi une forme d'expérimentation exploratoire similaire à ce que l'on peut trouver, par exemple, en physique ou en chimie. La diversité des techniques employées au sein même des mathématiques expérimentales ouvre dès lors la porte à d'autres études de cas possibles, qui pourront ainsi permettre de mieux comprendre les notions d'exploration mathématique et d'expérience exploratoire centrales aux mathématiques expérimentales.

6. Conclusion

La philosophie de la pratique mathématique constitue à ce jour une part importante de la recherche contemporaine en philosophie des mathématiques[33]. Comme nous avons pu le voir dans ce chapitre, le domaine se distingue notamment pas son caractère hautement *interdisciplinaire*, pouvant interagir de manière fructueuse avec de nombreux domaines connexes tels que l'histoire, la sociologie, et l'anthropologie des mathématiques, les sciences de l'éducation et les sciences cognitives dans leur traitement spécifique des mathématiques, ou encore l'informatique et l'intelligence artificielle dans leurs tentatives de développer des agents mathématiques artificielles. Du fait de la diversité des questions abordées, la philosophie de la pratique mathématique ore également un grand nombre d'opportunités d'interactions *au sein même* de la philosophie, partageant bien évidemment de nombreux points communs avec la philosophie des sciences, mais abordant aussi des sujets chevauchant certains des thèmes centraux à d'autres branches de la philosophie, telles que l'épistémologie et la métaphysique analytique, la philosophie de la logique, la philosophie du langage, ou encore la philosophie de l'action. La pluralité des perspectives et approches adoptées, ainsi que la capacité d'interaction à la fois à l'intérieur *et* à l'extérieur de la philosophie, font de la philosophie de la pratique mathématique une source importante de questions et méthodes nouvelles — et donc de *progrès* — en philosophie des mathématiques. Les conditions sont aujourd'hui

32. L'algorithme PSLQ permet de détecter des relations linéaires parmi des entiers relatifs exprimés, avec une précision élevée, par des représentations décimales finies. L'algorithme PSLQ a été introduit dans la littérature par Ferguson *et al.* [1999]. Bailey et Borwein [2005] et Sørensen [2010] offrent des présentations accessibles de cet algorithme.

33. Pour une discussion de l'impact de la philosophie de la pratique mathématique sur la philosophie des mathématiques, voir van Bendegem [2014].

optimales pour la poursuite de ce mouvement, le domaine reposant actuellement sur une large communauté de recherche, répartie sur de nombreux pays, au fonctionnement particulièrement dynamique, et prête à accueillir toute volonté de faire avancer notre compréhension des mathématiques comme activité humaine[34].

34. Le mouvement est principalement organisé autour de l'*Association for the Philosophy of Mathematical Practice (APMP)*. Pour plus d'informations sur l'APMP, nous renvoyons au site internet : http://www.philmathpractice.org.

Bibliographie

A. ABERDEIN : The informal logic of mathematical proof. *In* R. HERSH, éd. : *18 Unconventional Essays on the Nature of Mathematics*, p. 56–70. Springer, New York, 2006.

L. M. ADLEMAN : Molecular computation of solutions to combinatorial problems. *Science*, 266(5187):1021–1024, 1994.

K. APPEL et W. HAKEN : Every planar map is four colorable. Part I: Discharging. *Illinois Journal of Mathematics*, 21(3):429–490, 1977.

K. APPEL , W. HAKEN et J. KOCH : Every planar map is four colorable. Part II : Reducibility. *Illinois Journal of Mathematics*, 21(3):491–567, 1977.

A. ARANA : Imagination in mathematics. *In* A. KIND, éd. : *The Routledge Handbook of Philosophy of Imagination*, p. 463–477. Routledge, Londres, 2016.

J. AVIGAD : Mathematical method and proof. *Synthese*, 153(1):105–159, 2006.

J. AVIGAD : Computers in mathematical inquiry. *In* P. MANCOSU, éd. : *The Philosophy of Mathematical Practice*, p. 302–316. Oxford University Press, Oxford, 2008a.

J. AVIGAD : Understanding proofs. *In* P. MANCOSU, éd. : *The Philosophy of Mathematical Practice*, p. 317–353. Oxford University Press, Oxford, 2008b.

J. AVIGAD : Understanding, formal verification, and the philosophy of mathematics. *Journal of the Indian Council of Philosophical Research*, 27:161–197, 2010.

J. AVIGAD, E. DEAN et J. MUMMA : A formal system for Euclid's *Elements*. *The Review of Symbolic Logic*, 2(4):700–768, 2009.

J. AZZOUNI : The derivation-indicator view of mathematical practice. *Philosophia Mathematica*, 12(3):81–105, 2004.

J. AZZOUNI : Does reason evolve ? (Does the reasoning in mathematics evolve ?). *In* B. SRIRAMAN, éd. : *Humanizing Mathematics and its Philosophy: Essays Celebrating the 90th Birthday of Reuben Hersh*. Birkhäuser, Cham, 2017.

D. H. BAILEY et J. M. BORWEIN : Experimental mathematics: Examples, methods and implications. *Notices of the American Mathematical Society*, 52(5):502–514, 2005.

A. Baker : Experimental mathematics. *Erkenntnis*, 68(3):331–344, 2008.

J. T. Baldwin : *Model Theory and the Philosophy of Mathematical Practice : Formalization without Foundationalism*. Cambridge University Press, Cambridge, 2018.

J. Barwise, éd. : *Handbook of Mathematical Logic*. Elsevier, Amsterdam, 1977.

J. M. Borwein et D. H. Bailey : *Mathematics by Experiment: Plausible Reasoning in the 21st Century*. A K Peters, Natick, MA, 2004.

J. M. Borwein, D. H. Bailey et R. Girgensohn : *Experimentation in Mathematics: Computational Paths to Discovery*. A K Peters, Natick, MA, 2004.

J. R. Brown : *Philosophy of Mathematics: An Introduction to a World of Proofs and Pictures*. Routledge, Londres, 1999.

J. Carter : Diagrams and proofs in analysis. *International Studies in the Philosophy of Science*, 24(1):1–14, 2010.

J. Carter : The role of representations in mathematical reasoning. *Philosophia Scientiæ*, 16(1):55–70, 2012.

J. Carter : Philosophy of mathematical practice: Motivations, themes and prospects. *Philosophia Mathematica*, 27(1):1–32, 2019.

M. Colyvan : *An Introduction to the Philosophy of Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2012.

D. Corfield : *Towards a Philosophy of Real Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

H. De Cruz et J. De Smedt : Mathematical symbols as epistemic actions. *Synthese*, 190(1):3–19, 2013.

H. W. De Regt, S. Leonelli et K. Eigner, éds. : *Scientific Understanding: Philosophical Perspectives*. University of Pittsburgh Press, Pittsburgh, PA, 2009.

S. De Toffoli : 'Chasing' the diagram—The use of visualization in algebraic reasoning. *The Review of Symbolic Logic*, 10(1):158–186, 2017.

S. De Toffoli et V. Giardino : Forms and roles of diagrams in knot theory. *Erkenntnis*, 79(3):829–842, 2014.

M. Detlefsen : Formalism. *In* S. Shapiro, éd. : *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, p. 236–317. Oxford University Press, Oxford, 2007.

M. Detlefsen et M. Luker : The four-color theorem and mathematical proof. *The Journal of Philosophy*, 77(12):803–820, 1980.

K. EASWARAN : Probabilistic proofs and transferability. *Philosophia Mathematica*, 17(3):341–362, 2009.

EUCLIDE D'ALEXANDRIE : *Les Éléments, volume I, livres I–IV*. PUF, Paris, 1990. Traduction et commentaires par Bernard Vitrac avec une introduction générale par Maurice Caveing.

D. FALLIS : The epistemic status of probabilistic proof. *The Journal of Philosophy*, 94(4):165–186, 1997.

D. FALLIS : What do mathematicians want? Probabilistic proofs and the epistemic goals of mathematicians. *Logique & Analyse*, 179–180:373–388, 2002.

D. FALLIS : Probabilistic proofs and the collective epistemic goals of mathematicians. *In* H. B. SCHMID, M. WEBER et D. SIRTES, éds : *Collective Epistemology*, p. 157–175. Ontos Verlag, Heusenstamm, 2011.

H. R. P. FERGUSON, D. H. BAILEY et S. ARNO : Analysis of PSLQ, an integer relation finding algorithm. *Mathematics of Computation*, 68(225):351–369, 1999.

J. FERREIRÓS : *Mathematical Knowledge and the Interplay of Practices*. Princeton University Press, Princeton, 2015.

J. FERREIRÓS et J. J. GRAY : *The Architecture of Modern Mathematics: Essays in History and Philosophy*. Oxford University Press, Oxford, 2006.

J. FRANS et B. VAN KERKHOVE : Mathematical aims beyond justification [special issue]. *Logique & Analyse*, 60(237), 2017.

M. GIAQUINTO : *Visual Thinking in Mathematics : An Epistemological Study*. Oxford University Press, Oxford, 2007.

M. GIAQUINTO : The Epistemology of Visual Thinking in Mathematics. *In* E. N. ZALTA, éd.: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, Winter 2016, 2016.

V. GIARDINO : Diagrammatic reasoning in mathematics. *In* L. MAGNANI et T. BERTOLOTTI, éds : *Springer Handbook of Model-Based Science*, p. 499–522. Springer, Cham, 2017a.

V. GIARDINO : The practical turn in philosophy of mathematics: A portrait of a young discipline. *Phenomenology and Mind*, 12:18–28, 2017b.

K. GÖDEL : Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 38(1):173–198, 1931.

K. GÖDEL : The present situation in the foundations of mathematics. *In* S. FEFERMAN, J. W. DAWSON Jr., W. GOLDFARB, C. PARSONS et R. M. SOLOVAY, éds : *Collected Works, vol. III: Unpublished Essays and Lectures*, p. 45–53. Oxford University Press, Oxford, 1995.

G. Gonthier : Formal proof–The four-color theorem. *Notices of the American Mathematical Society*, 55(11):1382–1393, 2008.

S. R. Grimm, C. Baumberger et S. Ammon, éds. *Explaining Understanding: New Perspectives from Epistemology and Philosophy of Science*. Routledge, New York, 2017.

E. R. Grosholz : *Representation and Productive Ambiguity in Mathematics and the Sciences*. Oxford University Press, Oxford, 2007.

H. Hahn : The crisis in intuition. *In* B. McGuinness, éd. : *Hans Hahn. Empiricism, Logic and Mathematics : Philosophical Papers*, p. 73–102. Reidel, Dordrecht, 1933/1980.

T. C. Hales : Formal proof. *Notices of the American Mathematical Society*, 55(11):1370–1380, 2008.

T. C. Hales : *Dense Sphere Packings : A Blueprint for Formal Proofs*. Cambridge University Press, Cambridge, 2012.

Y. Hamami : Mathematical inference and logical inference. *Review of Symbolic Logic*, 11(4):665–704, 2018.

Y. Hamami et R. L. Morris : Philosophy of mathematical practice : A primer for mathematics educators. *ZDM Mathematics Education*, 52:1113–1126, 2020.

J. Harrison : Formal proof–Theory and practice. *Notices of the American Mathematical Society*, 55(11):1395–1406, 2008.

D. Hilbert : Die grundlagen der geometrie. *In* M. Hallett et U. Majer, éds : *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Geometry 1891–1902*, p. 72–123. Springer, Berlin, 1894/2004.

E. Hutchins : Material anchors for conceptual blends. *Journal of Pragmatics*, 37(10):1555–1577, 2005.

J. C. Jackson : Randomized arguments are transferable. *Philosophia Mathematica*, 17(3):363–368, 2009.

P. J. Kellman, C. M. Massey et J. Y. Sona : Perceptual learning modules in mathematics: Enhancing students' pattern recognition, structure extraction, and fluency. *Topics in Cognitive Science*, 2(2):285–305, 2010.

D. Kirsh et P. Maglio : On distinguishing epistemic from pragmatic action. *Cognitive Science*, 18(4):513–549, 1994.

P. Kitcher : *The Nature of Mathematical Knowledge*. Oxford University Press, New York, 1984.

I. Lakatos : *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery*. Cambridge University Press, Cambridge, 1976.

D. Landy, C. Allen et C. Zednik : A perceptual account of symbolic reasoning. *Frontiers in Psychology*, 5(275), 2014.

D. Landy et R. L. Goldstone : How abstract is symbolic thought ? *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 33(4):720–733, 2007.

B. Larvor : How to think about informal proofs. *Synthese*, 187(2):715–730, 2012.

B. Larvor, éd. : *Mathematical Cultures: The London Meetings 2012-2014*. Birkhäuser, Bâle, 2016.

H. Leitgeb : On formal and informal provability. *In* Ø. Linnebo et O. Bueno, éds : *New Waves in Philosophy of Mathematics*, p. 263–299. Palgrave Macmillan, New York, 2009.

B. Löwe et T. Müller, éds. : *PhiMSAMP. Philosophy of Mathematics: Sociological Aspects and Mathematical Practice*. College Publications, Londres, 2010.

S. Mac Lane : *Mathematics: Form and Function*. Springer, New York, 1986.

D. Macbeth : Seeing how it goes: Paper-and-pencil reasoning in mathematical pratice. *Philosophia Mathematica*, 20(1):58–85, 2012.

D. Macbeth : *Realizing Reason: A Narrative of Truth and Knowing*. Oxford University Press, Oxford, 2014.

P. Maddy : *Naturalism in Mathematics*. Clarendon Press, Oxford, 1997.

P. Mancosu, éd. : *The Philosophy of Mathematical Practice*. Oxford University Press, Oxford, 2008.

P. Mancosu, K. F. Jørgensen et S. A. Pedersen, éds. : *Visualization, Explanation and Reasoning Styles in Mathematics*. Springer, Dordrecht, 2005.

K. Manders : The Euclidean diagram (1995). *In* P. Mancosu, éd. : *The Philosophy of Mathematical Practice*, p. 80–133. Oxford University Press, Oxford, 2008.

M. McEvoy : Experimental mathematics, computers and the a priori. *Synthese*, 190 (3):397–412, 2013.

N. Miller : *Euclid and his Twentieth Century Rivals: Diagrams in the Logic of Euclidean Geometry*. CSLI Publications, Stanford, 2007.

J. Mumma : *Intuition Formalized: Ancient and Modern Methods of Proof in Elementary Geometry*. Thèse de doctorat, Carnegie Mellon University, 2006.

J. Mumma : Proofs, pictures, and Euclid. *Synthese*, 175(2):255–287, 2010.

J. Mumma et M. Panza : Diagrams in mathematics : History and philosophy [special issue]. *Synthese*, 186(1), 2012.

R. Netz : *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics: A Study in Cognitive History*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

M. Panza : The twofold role of diagrams in Euclid's plane geometry. *Synthese*, 186 (1):55–102, 2012.

M. Pasch : The axiomatic method in modern mathematics. *In* S. Pollard, éd. : *Essays on the Foundations of Mathematics by Moritz Pasch*, p. 221–242. Springer, Dordrecht, 1926/2010.

H. Poincaré : Les mathématiques et la logique. *Revue de métaphysique et de morale*, 13 (6):815–835, 1905.

G. Pólya : *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*. Princeton University Press, Princeton, 1945.

G. Pólya : *Mathematics and Plausible Reasoning (Two Volumes)*. Princeton University Press, Princeton, 1954.

G. Pólya : *Mathematical Discovery: On Understanding, Learning, and Teaching Problem Solving (Two Volumes)*. John Wiley & Sons, New York, 1962.

M. O. Rabin : Probabilistic algorithm for testing primality. *Journal of Number Theory*, 12 (1):128–138, 1980.

D. Rabouin : Logic of imagination. Echoes of Cartesian epistemology in contemporary philosophy of mathematics and beyond. *Synthese*, 195:4751–4783, 2018.

Y. Rav : Why do we prove theorems? *Philosophia Mathematica*, 7(3):5–41, 1999.

Y. Rav : A critique of a formalist-mechanist version of the justification of arguments in mathematicians' proof practices. *Philosophia Mathematica*, 15(3):291–320, 2007.

J. A. Robinson : Formal and informal proofs. *In* R. S. Boyer, éd. : *Automated Reasoning: Essays in Honor of Woody Bledsoe*, p. 267–282. Kluwer, Londres, 1991.

H. K. Sørensen : Exploratory experimentation in experimental mathematics: A glimpse at the PSLQ algorithm. *In* B. Löwe et T. Müller, éds : *PhiMSAMP. Philosophy of Mathematics: Sociological Aspects and Mathematical Practice*, p. 341–360. College Publications, Londres, 2010.

I. Starikova : Why do mathematicians need dierent ways of presenting mathematical objects? The case of Cayley graphs. *Topoi*, 29:41–51, 2010.

I.Starikova : From practice to new concepts: Geometric properties of groups. *Philosophia Scientiæ*, 16(1):129–151, 2012.

P. Teller : Computer proof. *The Journal of Philosophy*, 77(12):797–803, 1980.

S. E. Toulmin : *The Uses of Argument*. Cambridge University Press, Cambridge, 1958.

A.S.Troelstra et D. Van Dalen : *Constructivism in Mathematics: An Introduction (vol. I et II)*. Elsevier, Amsterdam, 1988.

T. Tymoczko : The four-color problem and its philosophical significance. *The Journal of Philosophy*, 76(2):57–83, 1979.

J. P. van Bendegem: Mathematical experiments and mathematical pictures. *In* I. Douven et L.Horsten, éds : *Realism in the Sciences: Proceedings of the Ernan McMullin Symposium Leuven 1995*, p. 203–216. Leuven University Press, Louvain, 1996.

J. P. van Bendegem : What, if anything, is an experiment in mathematics? *In* D. Anapolitanos, A. Baltas et S. Tsinorema, éds : *Philosophy and the Many Faces of Science*, p. 172–182. Rowman & Littlefield, Lanham, 1998.

J. P. van Bendegem : The impact of the philosophy of mathematical practice on the philosophy of mathematics. *In* L. Soler, S. Zwart, V. Israel-Jost et M. Lynch, éds : *Science after the Practice Turn in the Philosophy, History, and Social Studies of Science*, p. 215–226. Routledge, New York, 2014.

B. van Kerkhove, éd. : *New Perspectives on Mathematical Practices: Essays in Philosophy and History of Mathematics*. World Scientific Printers, Singapour, 2009.

B. van Kerkhove et J. P. van Bendegem, éds. : *Perspectives on Mathematical Practices: Bringing Together Philosophy of Mathematics, Sociology of Mathematics, and Mathematics Education*. Springer, Dordrecht, 2007.

R. Wagner : *Making and Breaking Mathematical Sense: Histories and Philosophies of Mathematical Practice*. Princeton University Press, Princeton/Oxford, 2017.

D. N. Walton : *The New Dialectic: Conversational Contexts of Argument*. University of Toronto Press, Toronto, 1998.

F. Wiedijk : Formal proof–Getting started. *Notices of the American Mathematical Society*, 55(11):1408–1414, 2008.

R. L. Wilder : The cultural basis of mathematics. *In Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, vol. 1, p. 258–271, Providence, 1950. American Mathematical Society. Reproduit in *New Directions in the Philosophy of Mathematics: An Anthology*, éd. Thomas Tymoczko, Birkhäuser, Boston, 1986.

R. L. Wilder : *Mathematics as a Cultural System*. Pergamon Press, Oxford, 1981.